MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 18.02.2012

Barem
Clasa a 12-a

Problema 1.

Oficiu…………………………………………………………………………………**1p**

(i)

Arată că A(x)A(y)=A(x+y+xy) ……………………………………………………2p

Deduce $(G,\cdot)$ grup abelian……………………………………………………2p

(ii)

$f:G\to(-1,\infty)$, $f(A(x))=x$ este izomorfism între $(G,\cdot)$ și $((-1,\infty),\circ)$

unde $x\circ y=x+y+xy$ ……………………………………………………………1p

$g:(-1,\infty)\to R$, $g(x)=\ln(x+1)$ este izomorfism între $((-1,\infty),\circ)$ și $(R,+)$ ……..1p

$h:G\to R$, $h(x)=(g\circ f)(x)$ este izomorfism între $(G,\cdot)$ și $(R,+)$ ……………………1p

$(R,+)\cong((0,\infty),\cdot)$ ……………………………………………………………1p

Deduce $(G,\cdot)\cong((0,\infty),\cdot)$ ……………………………………………………1p

Problema 2.

Oficiu…………………………………………………………………………………**1p**

(i)

Pentru $y\to y^{-1}$ obține $xy=y^{-1}x^{-1}$ ……………………………………………1p

Deduce $xy=(xy)^{-1}$ și $(xy)^2=e$ ……………………………………………………1p

Pentru $y=x^2$ obține $x^6=e$ și pentru $y=x$ obține $x^4=e$ ……………………………1p

Deduce $x^2=e$ și trage concluzia ……………………………………………………2p

(ii)

$\{0\}$ subgrup finit al lui (Z,+)……………………………………………………1p

Dacă $H\subset Z$ este subgrup finit al lui Z și $x\neq 0, x\in H$ avem $\{nx \mid n\in Z\}\subset H$ ……1p

Deduce H nu poate fi finit ……………………………………………………………1p

Concluzionează $\{0\}$ este singurul subgrup finit ……………………………………1p

Problema 3.

Oficiu…………………………………………………………………………………1p

(i) O posibilă primitivă $F:R\to R$ este $F(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ ……………………2p

Nu există $F'(0)$ ……………………………………………………………………2p

Deduce că nu există $k\in R$ astfel încât f să admită primitive…………………………1p

(ii) $I=\int \frac{(x+1)\ln x}{e^x(x\ln x-1)^2}dx=\int\left(\frac{-x}{x\ln x-1}\right)'\cdot\frac{\ln x}{e^x}dx$ 2p

$I=\frac{-xe^{-x}\ln x}{x\ln x-1}-\int e^{-x}dx=\frac{-xe^{-x}\ln x}{x\ln x-1}+e^{-x}+C$ 2p

Problema 4.

Oficiu...1p

Pentru $x\to\frac{1-x}{1+x}$, obține $F\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\cdot f(x)$ 2p

Deduce $F(x)=F\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ 2p

Observă F(0)=F(1) și aplică Teorema lui Rolle pe [0,1] 2p

Obține $F'(c)=0$ cu $c\in(0,1)$ 1p

Deduce $f(c)=0\notin R^*$, contradicție...2p